

Examen HAVO

2013

tijdvak 1
vrijdag 17 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Dit examen bestaat uit 20 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.

Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

De huisarts

Huisartsen nemen een centrale positie in binnen de gezondheidszorg. De huisarts is namelijk het eerste aanspreekpunt voor mensen met vragen over gezondheid en ziekte. Veel mensen hebben dan ook regelmatig contact met hun huisarts, bijvoorbeeld door naar het spreekuur te gaan of een telefonisch consult te hebben. Deze contacten worden contactmomenten genoemd. Volgens een medisch tijdschrift hadden in 2008 mannelijke patiënten gemiddeld 3,5 en vrouwelijke patiënten gemiddeld 4,7 contactmomenten met hun eigen huisarts.



Neem aan dat deze gegevens ook gelden voor huisarts Tineke Hoekstra. Zij heeft in 2008 een huisartsenpraktijk met 912 mannelijke patiënten en dat is 52% van haar totale aantal patiënten.

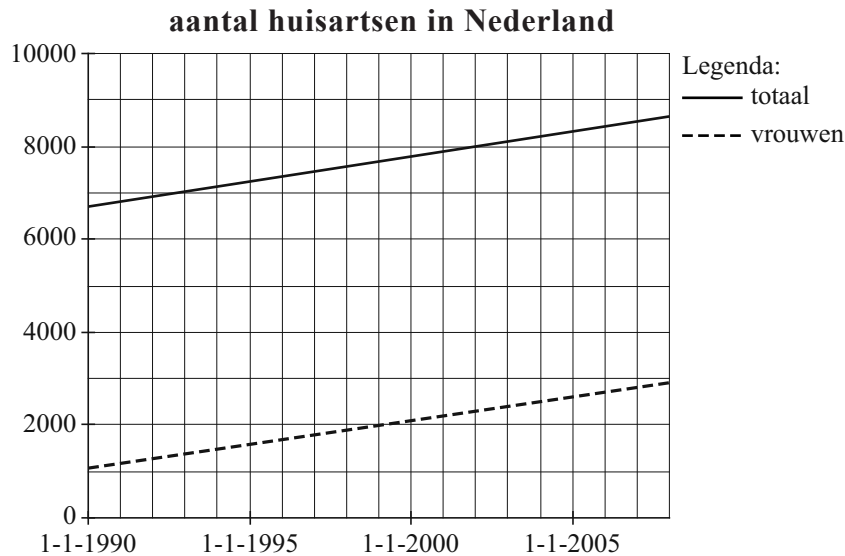
- 4p **1** Bereken voor Tineke in 2008 het totale aantal contactmomenten met al haar patiënten.

Niet elke patiënt van Tineke heeft jaarlijks contact met haar. Van haar mannelijke patiënten had 30% in 2008 geen enkel contactmoment met haar. Dat betekent dat er met de mannelijke patiënten die wel contact met haar hadden, gemiddeld meer dan 3,5 contactmomenten waren.

- 3p **2** Bereken voor de mannelijke patiënten die wel contact met haar hadden, hoeveel contactmomenten zij in 2008 gemiddeld hadden.

Een jaar of veertig geleden was een vrouwelijke huisarts nog een uitzondering. Maar tegenwoordig zijn er heel wat vrouwelijke huisartsen en dat aantal neemt nog steeds toe, zie de figuur. We nemen aan dat de stijging lineair verloopt.

figuur



Op 1 januari 1990 waren er 1078 vrouwelijke huisartsen en op 1 januari 2008 bleek dit aantal gestegen tot 2800. Het aantal vrouwelijke huisartsen H_V na t jaar, met $t = 0$ op 1 januari 1990, is te schrijven als

$$H_V = a \cdot t + 1078$$

De waarde van a is ongeveer 106.

- 3p **3** Bereken met behulp van bovenstaande gegevens de waarde van a in één decimaal nauwkeurig.

Ook het totaal aantal huisartsen H_T neemt vanaf 1 januari 1990 toe. Hiervoor geldt de formule

$$H_T = 107 \cdot t + 6703, \text{ met } t \text{ in jaren en } t = 0 \text{ op 1 januari 1990.}$$

Als de stijging van het totaal aantal huisartsen en van het aantal vrouwelijke huisartsen zich op dezelfde manier voortzet als in de formules voor H_T en H_V is beschreven, komt er een moment dat er evenveel vrouwelijke als mannelijke huisartsen zullen zijn.

- 5p **4** Onderzoek in welk jaar dat zal zijn.

Frisbee werpen

Op een kermis kun je meedoen met het spel 'Frisbee werpen'. Je werpt daarbij een ronde plastic schijf, een frisbee, op een vloer met even grote rechthoekige tegels. Zodra de frisbee stil ligt, kijk je hoe hij terecht gekomen is: als de frisbee in zijn geheel op één tegel ligt, win je een prijs. Het is echter onmogelijk om goed te richten, doordat je een blinddoek draagt tijdens het werpen.



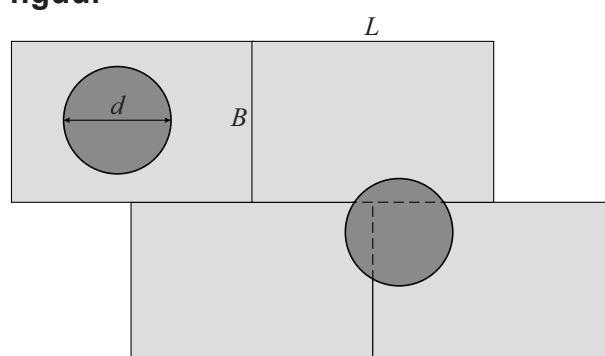
In de figuur zie je het bovenaanzicht van een stukje van de tegelvloer. De linker frisbee ligt volledig op één tegel en dat levert dus een prijs op. De rechter frisbee ligt op meer dan één tegel en dat levert geen prijs op.

Wiskundigen hebben een formule bedacht waarmee je kunt berekenen hoe groot het verwachte percentage worpen is waarbij de frisbee op meer dan één tegel terechtkomt. Deze formule is:

$$P = 100 \cdot \frac{L \cdot B - (L - d) \cdot (B - d)}{L \cdot B}$$

Hierin is:

- P het verwachte percentage worpen waarbij de frisbee op meer dan één tegel terechtkomt;
- L de lengte van een tegel in cm;
- B de breedte van een tegel in cm;
- d de diameter van de frisbee in cm.



In de rest van de opgave gaan we uit van deze formule. Hierbij geldt: de diameter van de frisbee is kleiner dan zowel de lengte als de breedte van een tegel.

De tegels van de tegelvloer zijn 60 cm bij 40 cm groot.

De spelers werpen met een frisbee met een diameter van 25 cm.

- 3p **5** Bereken hoeveel procent van de worpen bij deze afmetingen naar verwachting een prijs zal opleveren.

De kermisexploitant heeft frisbees met verschillende diameters. Hij zegt: "Hoe groter de diameter van de frisbee is, des te kleiner is het verwachte percentage worpen dat een prijs oplevert." Uit de formule volgt dat deze uitspraak waar is.

- 4p **6** Toon dit aan de hand van de formule aan, zonder voor d getallen in te vullen.

De kermisexploitant is van plan een nieuwe tegelvloer aan te leggen voor zijn spel. Hij wil daarbij gebruikmaken van vierkante tegels. Bij vierkante tegels is het percentage P uit te drukken in de lengte L van de tegel en de diameter d van de frisbee. De formule voor P kan dan herleid worden tot:

$$P = 100 \cdot \frac{2dL - d^2}{L^2}$$

4p 7 Laat deze herleiding zien.

De kermisexploitant besluit vierkante tegels te gebruiken van 75 cm bij 75 cm. Hij wil dat de diameter van de frisbee zo groot is, dat naar verwachting de helft van de worpen een prijs oplevert.

4p 8 Bereken welke diameter daarvoor nodig is.

Ontslagvergoeding

Bij grote bedrijven wordt er regelmatig gereorganiseerd. Hierbij vallen soms gedwongen ontslagen. Een ontslagen werknemer krijgt dan vaak eenmalig een ontslagvergoeding.

Er zijn verschillende rekenmethodes om deze vergoeding te bepalen. In deze opgave bekijken we er twee.

De eerste rekenmethode gebruikt de formule

$$V_1 = 0,5 \cdot m \cdot g$$

Hierin is V_1 de ontslagvergoeding in euro's, m het bruto maandsalaris in euro's en g het aantal gewogen dienstjaren. De dienstjaren vóórdat iemand 40 jaar is, tellen elk voor 1, de volgende tien dienstjaren tellen elk voor 1,5 en elk dienstjaar vanaf het moment dat iemand 50 jaar is geworden, telt voor 2.

Bob Jansen is onlangs 52 jaar geworden. Hij werkt vanaf zijn dertigste verjaardag bij zijn huidige werkgever. Deze werkgever gaat reorganiseren met als gevolg dat Bob ontslagen wordt.

Bob had een bruto maandsalaris van 4300 euro.

- 3p **9** Toon aan dat Bob volgens de formule een ontslagvergoeding krijgt van meer dan 60 000 euro.

De tweede rekenmethode gebruikt de formule

$$V_2 = 6 \cdot m + 2,4 \cdot m \cdot d$$

Hierin is V_2 de ontslagvergoeding in euro's, m het bruto maandsalaris in euro's en d het aantal dienstjaren, geteld vanaf de 36e verjaardag.

Er geldt dat $d = 0$ totdat de werknemer 37 jaar wordt. Op de dag dat de werknemer 37 jaar wordt, wordt $d = 1$. Op de 38e verjaardag wordt $d = 2$, enzovoort. Het aantal dienstjaren wordt altijd in gehele jaren berekend.

Bij de tweede formule geldt een maximale ontslagvergoeding van 54 keer het bruto maandsalaris.

Henk Klaassen werkt vanaf zijn 36e verjaardag bij zijn huidige werkgever. Hij is bang bij een reorganisatie te worden ontslagen. Neem aan dat zijn maandsalaris door de jaren heen steeds gelijk blijft.

- 4p **10** Bereken na hoeveel dienstjaren hij voor het eerst zijn maximale ontslagvergoeding zou krijgen volgens de tweede formule.

Vakbonden hebben liever dat de formule voor V_2 gebruikt wordt dan de formule voor V_1 . Toch is de formule voor V_2 niet altijd gunstiger. Er zijn situaties waarbij de eerste formule gunstiger is voor een ontslagen werknemer.

- 4p 11 Geef een rekenvoorbeeld van zo'n situatie en geef daarbij aan op welke leeftijd de werknemer in dienst is getreden en op welke leeftijd hij ontslagen wordt.

Met de tweede formule kan de ontslagvergoeding V_2 worden berekend als het bruto maandsalaris m en het aantal dienstjaren d , geteld vanaf de 36e verjaardag, bekend zijn.

De formule kan worden herschreven tot een formule die uitgaat van het bruto jaarsalaris in plaats van het bruto maandsalaris. Een jaarsalaris is meer dan 12 maandsalarissen, omdat een werknemer ook vakantiegeld en een eindejaarsuitkering uitbetaald krijgt. Hierdoor geldt dat het bruto jaarsalaris j gelijk is aan 13,5 keer het bruto maandsalaris m .

De tweede formule is daarmee te schrijven in de vorm:

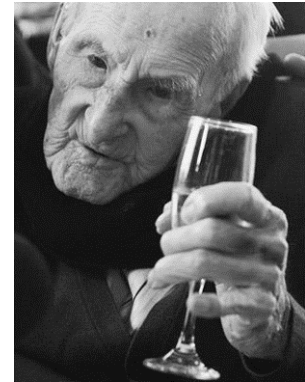
$$V_2 = \dots \cdot j + \dots \cdot j \cdot d$$

- 3p 12 Bereken in twee decimalen nauwkeurig de getallen die op de puntjes moeten staan. Licht je werkwijze toe.

Centenarians

Hoe oud kun je worden? Veel mensen vinden het al bijzonder als iemand de leeftijd van 90 jaar bereikt. Toch zijn er zelfs mensen die 100 jaar of ouder worden.

In Engeland wordt iemand die de leeftijd van 100 jaar bereikt, aangeduid met de titel **centenarian**. Er zijn maar weinig mensen die centenarian worden. Zelfs 90-jarigen worden maar zelden 100 jaar. Van degenen die toch de leeftijd van 100 jaar bereiken, worden sommigen zelfs **supercentenarian**: zij bereiken de leeftijd van 110 jaar. Deze titel is echter voor zeer weinigen weggelegd.



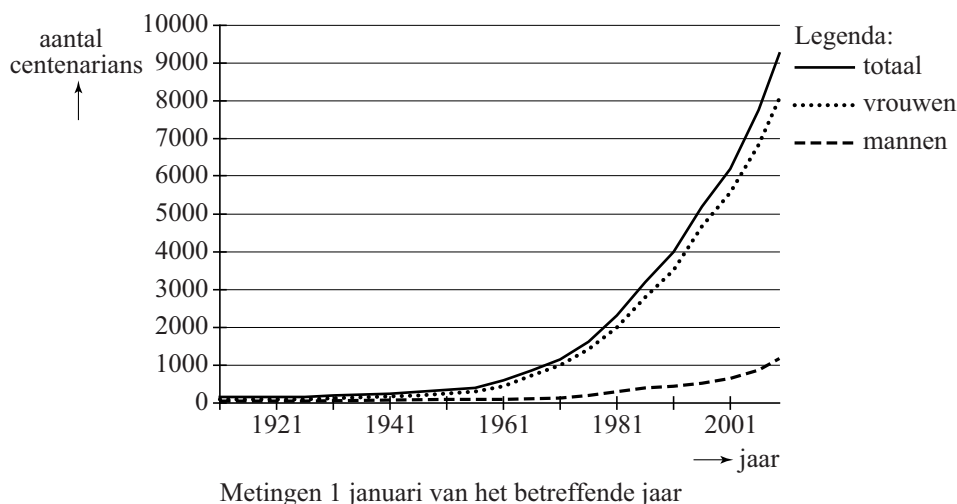
Uit onderzoek zijn de volgende gegevens bekend:

- van de 90-jarige mannen wordt 3,52% centenarian;
- van de 90-jarige mannen wordt maar 1 op de 2900 supercentenarian.

- 4p 13 Bereken hoeveel procent van de mannelijke 100-jarigen supercentenarian wordt. Rond je antwoord af op 2 decimalen.

Het aantal centenarians in Engeland wordt vanaf 1911 nauwkeurig bijgehouden. In figuur 1 kun je zien hoe het aantal centenarians zich in de loop van de jaren heeft ontwikkeld.

figuur 1



Vanaf 1967 begon het totale aantal centenarians bij benadering exponentieel te groeien. Waren er op 1 januari 1967 zo'n 1000 centenarians, op 1 januari 2009 was dit aantal gestegen tot 9600.

- 4p 14 Bereken het groeipercentage per jaar in deze periode.

In figuur 1 is duidelijk te zien dat de groei van het aantal centenarians voornamelijk voor rekening van de vrouwen komt. Op 1 januari 2009 was $\frac{7}{8}$ deel van de 9600 centenarians vrouwelijk.

Voor de toekomst gaat men in Engeland uit van de volgende aannames:

- het aantal centenarians stijgt vanaf 1 januari 2009 met 8,0% per jaar;
- het aantal vrouwelijke centenarians blijft in de toekomst $\frac{7}{8}$ deel van het totaal.

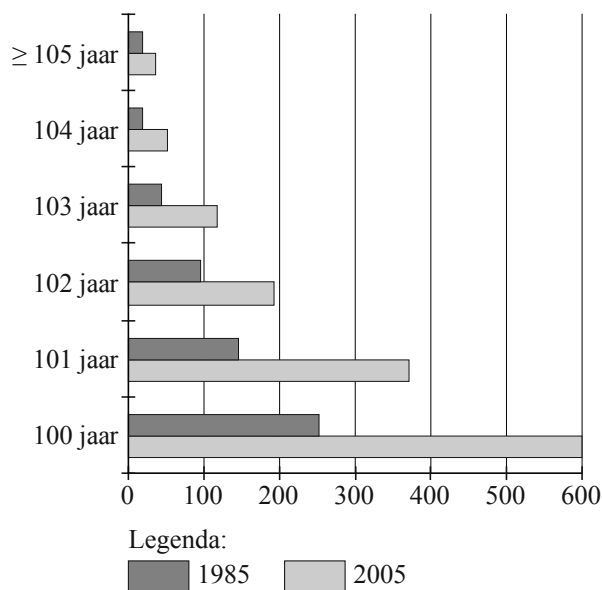
4p **15** Bereken het te verwachten aantal vrouwelijke centenarians op 1 januari 2034 in Engeland.

Ook in Nederland wordt het aantal personen van 100 jaar of ouder nauwkeurig bijgehouden. Deze personen worden ook wel **eeuwelingen** genoemd. Het Centraal Bureau voor de Statistiek heeft het aantal eeuwelingen in 2005 vergeleken met het aantal eeuwelingen in 1985. Gegevens daarover vind je in de figuren 2 en 3.

In figuur 2 kun je bijvoorbeeld aflezen dat er op 1 januari 1985 ongeveer 45 personen waren van 103 jaar oud. In figuur 3 kun je aflezen dat er op dat moment op elke 100 vrouwelijke eeuwelingen ongeveer 38 mannen waren.

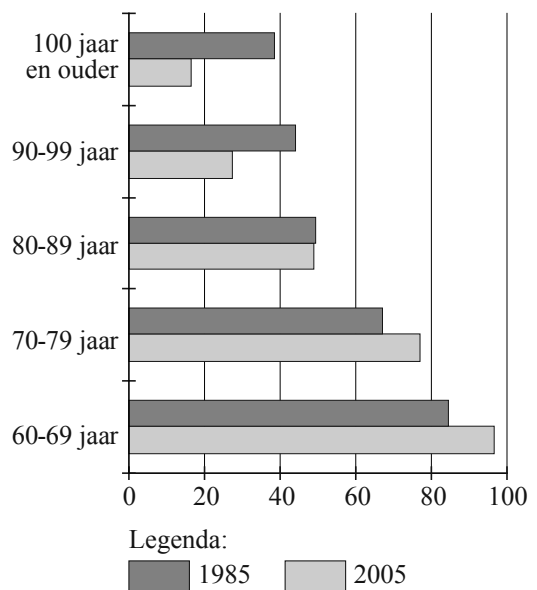
figuur 2

eeuwelingen naar leeftijd



figuur 3

aantal mannen per 100 vrouwen



6p **16** Bereken met de gegevens van de figuren 2 en 3 hoeveel vrouwelijke eeuwelingen er op 1 januari 2005 in Nederland waren.

Formule 1

De belangrijkste wedstrijden in de autosport zijn de Formule 1-wedstrijden. In deze opgave gaan we uit van het reglement van het jaar 2011.

Elke Formule 1-wedstrijd wordt op zondag door 24 coureurs gereden en telt mee voor het wereldkampioenschap. Op de foto zie je de auto's op hun startpositie bij die wedstrijd. Deze posities worden op zaterdag als volgt bepaald in drie kwalificatieronden:

foto



- In de eerste kwalificatieronde vallen de zeven langzaamste coureurs af. Zij moeten op zondag starten op de startposities 18 tot en met 24. Zij doen niet meer mee in de tweede en derde kwalificatieronde.
- Op dezelfde manier vallen in de tweede kwalificatieronde de zeven langzaamste coureurs af. Zij krijgen de startposities 11 tot en met 17. Zij doen niet meer mee in de derde kwalificatieronde.
- De tijden die de overgebleven coureurs in de derde kwalificatieronde rijden, bepalen de startposities 1 tot en met 10.

In elk van de drie gevallen geldt: de coureurs worden in volgorde van hun gereden tijd geplaatst, met de snelste vooraan.

De indeling van de 24 coureurs op de startposities wordt een startopstelling genoemd. Zie de figuur.

figuur

start	[2	[4	[6	[8	[10	[12	[14	[16	[18	[20	[22	[24
	[1	[3	[5	[7	[9	[11	[13	[15	[17	[19	[21	[23

Ad is een liefhebber van de Formule 1, maar hij heeft de kwalificatierondes niet kunnen zien. Op zaterdagavond hoort hij welke coureurs er in de eerste ronde zijn afgevallen en welke coureurs er in de tweede ronde zijn afgevallen. Hij weet echter van geen enkele coureur de gereden tijd, waardoor hij de startopstelling niet kent.

Ad bedenkt dat er dan heel wat startopstellingen mogelijk zijn.

3p 17 Bereken hoeveel dat er zijn.

We bekijken een wedstrijd op zondag bij droog weer. Er zijn dan 2 soorten banden beschikbaar: zachte en superzachte. Voor elke coureur geldt:

- Op elk moment van de wedstrijd moet hij rijden op vier banden van dezelfde soort.
- Hij **moet** in de wedstrijd beide soorten banden gebruiken.
- Het wisselen van de banden gebeurt tijdens zogenaamde pitstops.

Een coureur maakt tijdens deze wedstrijd 3 maal een pitstop om banden te laten wisselen.

Hij kan bijvoorbeeld beginnen op zachte banden, die bij de eerste pitstop laten wisselen voor een nieuwe set zachte banden, bij de tweede pitstop superzachte banden laten monteren en bij de laatste pitstop kiezen voor zachte banden. Zo zijn er meer mogelijkheden.

- 4p **18** Bereken hoeveel mogelijkheden er in totaal zijn voor een coureur die 3 pitstops maakt om banden te laten wisselen.

In onderstaande tabel zie je hoeveel punten een coureur verdient met zijn prestatie bij een wedstrijd. Coureurs die lager eindigen dan de 10e plaats, behalen geen punten. De coureur die aan het einde van het seizoen de meeste punten heeft verdiend, is wereldkampioen.

tabel

plaats	1e	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
aantal punten	25	18	15	12	10	8	6	4	2	1

In 2011 werden 19 Formule 1-wedstrijden gereden. Sebastian Vettel werd in dat jaar wereldkampioen. Tijdens het hele seizoen viel hij maar één keer uit vanwege een lekke band, waardoor hij 0 punten scoorde. Van de 18 wedstrijden waarin hij wel finishte, won hij er 11 en ook bij de overige 7 presteerde hij uitstekend. In slechts 1 van deze 7 wedstrijden eindigde hij niet bij de beste drie. In totaal haalde hij 392 punten.

- 5p **19** Bereken met behulp van bovenstaande gegevens hoe vaak hij tweede werd, hoe vaak hij derde werd en op welke plaats hij stond toen hij niet bij de beste drie eindigde.

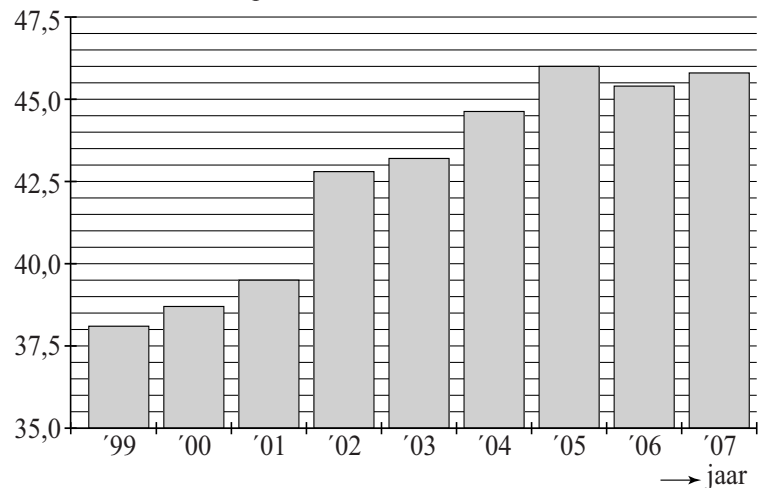
Schuldsanering

Als mensen grote schulden hebben, kan het gebeuren dat de rechtbank met hen een afspraak maakt waarbij de schulden volgens een strak schema worden afgelost. Zo'n afspraak heet een schuldsanering. Het Centraal Bureau voor de Statistiek heeft gegevens verzameld van het aantal schuldsaneringen per jaar. De gegevens over West-Nederland kun je aflezen in de figuren 1 en 2.

figuur 1

Percentage schuldsaneringen in West-Nederland
ten opzichte van heel Nederland

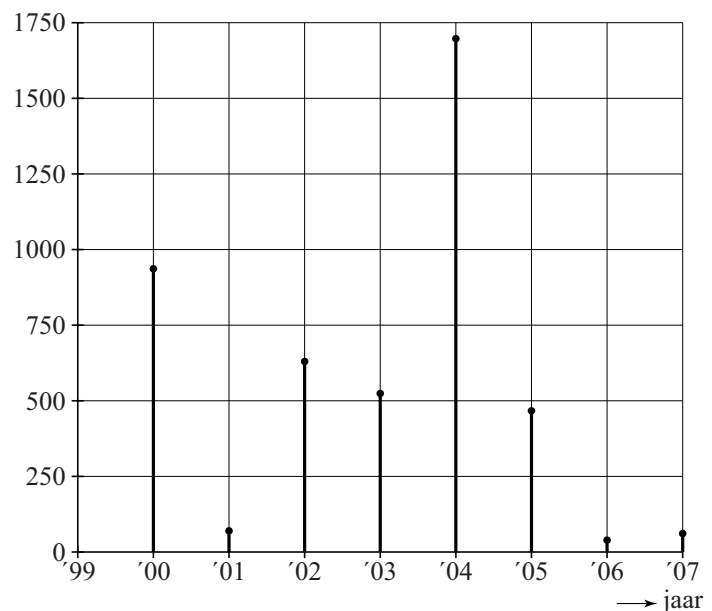
In figuur 1 kun je bijvoorbeeld zien dat in het jaar 2006 ruim 45% van de schuldsaneringen in heel Nederland plaatsvond in West-Nederland.



figuur 2

Verandering van het aantal schuldsaneringen
in West-Nederland

In figuur 2 zie je een toenamediagram van het aantal schuldsaneringen in West-Nederland. In deze grafiek kun je bijvoorbeeld aflezen dat er in West-Nederland in het jaar 2000 ruim 900 schuldsaneringen méér waren dan in het jaar 1999.



In 2001 waren er 3426 schuldsaneringen in West-Nederland. In de periode van 2001 tot en met 2004 is het aantal schuldsaneringen in heel Nederland behoorlijk toegenomen.

6p 20 Onderzoek hoe groot deze toename in heel Nederland was.